Interrogation n° 2

Mercredi 4 décembre 2024 — durée : 1 heure

Les réponses doivent être justifiées. On portera une attention particulière à la rédaction.
Les documents, téléphones portables et autres appareils électroniques sont interdits.
Les exercices sont indépendants les uns des autres.
La présentation doit être propre et soignée.

Questions de cours.

1. Énoncer le théorème d'arrêt. (1 pt)

2. Soit E un ensemble dénombrable. Soient μ une mesure de probabilité sur E et Q un noyau de transition (ou matrice de transition) sur E. Soit enfin $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E. Que signifie « $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de loi initiale μ et de noyau de transition Q » ? (1 pt)

Exercice I. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de loi uniforme sur $\{-1, +1\}$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pour tout $n \geq 0$, on note $Y_n = \cos\left(\frac{2\pi S_n}{3}\right)$. On admet que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.

1. Donner l'ensemble E des états possibles de la chaîne de Markov $(Y_n)_{n\geq 0}$. (0.5 pt)

2. Sans justification, donner pour chaque $(x, y) \in E^2$, la valeur de la probabilité de transition $Q(x, y)$. (1 pt)

Exercice II. On rappelle que si Z est une variable aléatoire réelle, alors $\|Z\|_\infty$ désigne la quantité $\inf\{a \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(|Z| \leq a) = 1\}$, où $\inf \varnothing = \infty$.
Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ une martingale bornée dans $\mathbf{L}^\infty$, c'est-à-dire une martingale telle que $\sup_n \|Z_n\|_\infty < \infty$.
   Pour chacune des questions 1a, 1b et 1c, si la réponse est oui, justifier ; si la réponse est non, donner un contre-exemple sans justifier.
   (a) Converge-t-elle nécessairement dans $\mathbf{L}^p$ pour tout $p \in [1, \infty[$? (0.5 pt)
   (b) Converge-t-elle nécessairement au sens presque sûr ? (0.5 pt)
   (c) Est-elle nécessairement uniformément intégrable ? (0.5 pt)

↻ Tournez la page, svp ↻

2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires de loi uniforme sur $\{-1,+1\}$. On suppose que les variables aléatoires $X_0, Y_0, X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ forment une famille indépendante. On introduit

$$T = \inf\{n \geq 0 \,:\, X_n = 1\},$$

toujours avec la convention selon laquelle $\inf \varnothing = \infty$. Pour tout $n \geq 0$, on note $M_n = Y_T \, \mathbf{1}_{T \leq n}$. Enfin, pour $n \geq 0$, on pose $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_n)$.

   (a) Montrer que T est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$. (1 pt)

   (b) Soit $n \geq 0$ et soit $k \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$. Justifier brièvement l'intégrabilité de M_{n+1} et calculer $\mathbf{E}\left(M_{n+1}\, \mathbf{1}_{\{T=k\}} \,|\, \mathscr{F}_n\right)$. *On pourra distinguer $k = n+1$ et les autres valeurs de k.* (1 pt)

   (c) Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$. (1 pt)

   (d) Montrer que la martingale $(M_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty$, c'est-à-dire que $\sup_n \|M_n\|_\infty < \infty$. (1 pt)

   (e) Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas dans $\mathbf{L}^\infty$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de variable aléatoire Z dans $\mathbf{L}^\infty$ telle que $\|M_n - Z\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. (1 pt)

Vous trouverez ci-dessous deux questions bonus.

Je vous conseille de ne les aborder que si vous avez terminé le reste du sujet en ayant eu le temps de bien rédiger et de vous relire. En effet, les questions suivantes sont beaucoup moins rentables que les autres en termes de difficulté et de nombre de points en jeu.

Question bonus I Revenez à l'exercice I et démontrez de façon propre que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est bien une chaîne de Markov et que son noyau de transition est celui que vous avez proposé. (0.5 pt)

Question bonus II Ajoutons une question 2(f) à l'exercice II : trouver une variable aléatoire intégrable Z telle qu'on ait $\forall n \geq 0$, $M_n = \mathbf{E}(Z \,|\, \mathscr{F}_n)$ presque sûrement. Vérifiez proprement que votre Z convient. *On attend une variable aléatoire Z dont la définition est simple et directe et ne fait pas appel à un passage à la limite.* (0.5 pt)

— Fin —